Φυλλάδιο 2, Άσκηση 1)

$f, g : A \to \mathbb{R}$ ο.σ. (ομοιόμορφα συνεχείς)

Νδο η $f+g$ είναι ο.σ.

α) Με χρήση του ε-δ ορισμού.

β) Με χρήση ακολουθιών.

Απόδ

α) Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f είναι ο.σ. $\exists \delta_1 > 0$ ώστε $\forall x, y \in A$: αν $|x-y| < \delta_1$ τότε:
$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Εφόσον η g είναι ο.σ. $\exists \delta_2 > 0$ ώστε $\forall x, y \in A$ αν $|x-y| < \delta_2$ τότε:
$|g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, είναι $\delta > 0$

$\forall x, y$ με $|x-y| < \delta \begin{cases} \leq \delta_1 \\ \leq \delta_2 \end{cases}$

$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| <$

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα η $f+g$ είναι ο.σ.

β) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαίες ακολουθίες στο A ώστε $x_n - y_n \to 0$

Εφόσον η f είναι ο.σ. προκύπτει: $f(x_n) - f(y_n) \to 0$

Εφόσον η g είναι ο.σ. προκύπτει: $g(x_n) - g(y_n) \to 0$

$\Rightarrow (f(x_n) + g(x_n)) - (f(y_n) + g(y_n)) \to 0$

$((f+g)(x_n)) - ((f+g)(y_n)) \to 0$

Συνεπώς $f+g$ ο.σ.

NO DATE

φυλλάδιο 2, Άσκ 2)

α) Ορίζουμε $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $f(x)=x$, $g(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Οι f,g είναι Ο.Σ.
Το γινόμενό τους είναι $(f\cdot g)(x)=x^2$,
η οποία είδαμε δείξαμε ότι είναι
Ο.Σ.

β) Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ φραγμένες και Ο.Σ
$\exists M_1>0 : |f(x)|\le M_1,\ \forall x\in A$.
$\exists M_2>0 : |g(x)|\le M_2,\ \forall x\in A$.
Έστω $\varepsilon>0$
Επειδή η f είναι Ο.Σ. $\exists\ \delta_1>0$ ώστε $\forall x,y\in A$
αν $|x-y|<\delta_1$ τότε $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2M_2}$

Επειδή η g είναι Ο.Σ $\exists\delta_2>0$ ώστε $\forall x,y\in A$
αν $|x-y|<\delta_2$ τότε $|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2M_1}$

Θέτουμε $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$.
Για κάθε $x,y\in A$ με $|x-y|<\delta \begin{cases} <\delta_1 \\ <\delta_2 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\le |f(x)g(x)-f(y)g(y)+f(x)g(y)-f(x)g(y)| \\
&\le |f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)| \\
&\le M_1\cdot\frac{\varepsilon}{2M_1}+M_2\cdot\frac{\varepsilon}{2M_2} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Άρα $f\cdot g$ είναι Ο.Σ.

Φυλλάδιο 2, Άσκ 3)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική

Να δ.ο. η f είναι Ο.Σ.

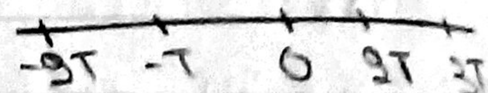
Απόδ

$\exists\, T>0 : f(x+T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Τότε $\forall \kappa\in\mathbb{Z}$: $f(x+\kappa T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon>0$.

Εφόσον είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-T,2T]$



$\exists\, \delta>0$ με $\delta<T$ ώστε

(*) $\forall x,y\in[-T,2T]$: αν $|x-y|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Έστω $x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta$

Θέτουμε $m=\left[\frac{x}{T}\right]$, $m\in\mathbb{Z}$.

$m \leq \frac{x}{T} \leq m+1$

$mT \leq x \leq mT+T$.

$0 \leq (x-mT)<T$ (1)

Έχουμε $|y-x|<\delta<T \Rightarrow$

$-T<y-x<T$ (2)

Άρα η (1) λόγω της (2) θα γίνει:

$-T<y-mT<2T$.

Έτσι $x-mT,\ y-mT \in[-T,2T]$ με:

$|(x-mT)-(y-mT)|=|x-y|<\delta$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} |\underbrace{f(x-mT)}_{=f(x)}-\underbrace{f(y-mT)}_{=f(y)}|<\varepsilon$.

$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Επομένως η f είναι Ο.Σ.

Φυλλάδιο 2, Άσκηση 4)

$f: [\alpha,\beta] \to [\gamma,\delta]$ συνεχής.

$g: [\gamma,\delta] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Ν.δ.ο. $g\circ f$ είναι Ο.Σ.

Απόδ

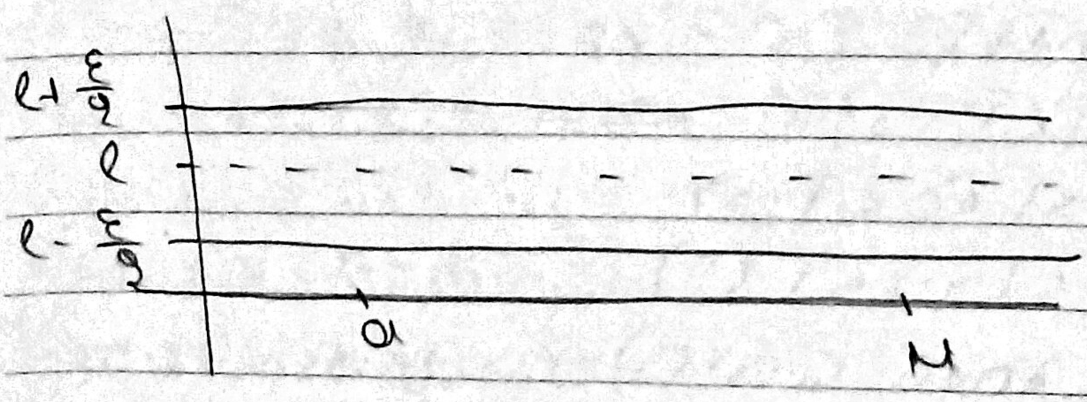
Η $g\circ f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής (ως σύνθεση συνεχών).

Άρα αφού $[\alpha,\beta]$ κλειστό διάστημα είναι Ο.Σ.

Φυλλάδιο 2, Άσκηση 5)

$f: [\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε να $\exists$ το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι Ο.Σ.

Απόδ



Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $\exists\, M>\alpha$ ώστε $\forall\, x>M$ να ισχύει $|f(x)-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. (1)

Εφόσον ο περιορισμός της f στο διάστημα $[\alpha, N-1]$ είναι συνεχής συνάρτηση σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, θα είναι Ο.Σ.
Άρα $\exists\, \delta>0$ με $\delta<1$ ώστε αν $x,y\in[\alpha,N+1]$ με $|x-y|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. $(*)$

Έστω τώρα τυχαία $x,y\in[\alpha,+\infty)$ με $|x-y|<\delta_1$:
α) $x,y\in[\alpha,N+1]$. Τότε από την $(*)$: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$
β) ένα εκ των x,y είναι μεγαλύτερο του $N+1$.
Έστω ότι $x>N+1$. Τότε εφόσον $|x-y|<\delta<1$

$$\vee$$
$$N$$

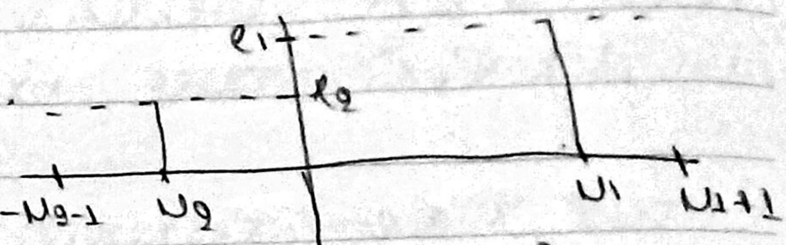
άρα $y>N$.
Εφόσον $x>N$ και $y>N \Rightarrow$ από την (1) θα έχουμε $|f(x)-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$ και $|f(y)-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$ και άρα:
$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-\ell|+|\ell-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$
Επομένως η f είναι Ο.Σ.

Φυλλάδιο 2, Άσκηση 6)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

Νδο η f είναι Ο.Σ.



Απόδ

Έστω $\varepsilon > 0$

$\exists\, N_1 > 0$ ώστε $\forall x > N_1: |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

$\exists\, N_2 > 0$ ώστε $\forall x < -N_2: |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Η f είναι Ο.Σ. στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-N_2-1, N_1+1]$, άρα $\exists\, \delta > 0$ με $\delta < 1$ ώστε αν $x, y \in [-N_2-1, N_1+1]$ με $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (3)

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$

α) Αν $x, y \in [-N_2-1, N_1+1]$ τότε από την (3) $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

β) Αν κάποιο από τα x, y είναι μεγαλύτερο από το N_1+1 τότε (όπως στην προηγούμενη άσκηση) $x, y \in [N_1, +\infty)$.

Άρα από την (1): $|f(x) - l_1| < \varepsilon/2$

$|f(y) - l_1| < \varepsilon/2$.

και όπως προηγούμενη άσκηση

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

γ) Αν κάποιο από τα x,y είναι μικρότερο του $-M_2-1$ τότε (εφόσον $|x-y|<\delta<1$) $x,y\in(-\infty, M_2)$

Άρα από την (2): $|f(x)-\ell_2|<\varepsilon/2$

και $|f(y)-\ell_2|<\varepsilon/2$

Άρα $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-\ell_2| + |\ell_2 - f(y_2)|$

$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

, άρα Ο.Σ.

Φυλλάδιο 2, Άσκηση 7)

Να ελέγξετε αν είναι Ο.Σ. καθεμία από τις συναρτήσεις.

α) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=18x+35$.

Η f είναι Ο.Σ. (πολλοί τρόποι).

β) $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\forall x,y\geq 1: |f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right| = \frac{|\sqrt{y}-\sqrt{x}|}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}$

$= \frac{|y-x|}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\cdot(\sqrt{y}+\sqrt{x})} \leq \frac{1}{2}|x-y|$.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}\geq 1\\ \sqrt{y}\geq 1\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 2\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\cdot(\sqrt{y}+\sqrt{x})\geq 2.$$

NO DATE

Η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (με σταθερά $\ell/2$) άρα είναι Ο.Σ.

<u>Β' τρόπος</u>: Το π.ο. είναι διάστημα.

$f(x) = x^{-1/2}$, $\forall x \geq 2$.

$f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2}$: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{2}$,

άρα f είναι Ο.Σ.

γ) $f : [0, \frac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x$.

Η $g : [0, \frac{\pi}{3}]$ $g(x) = \tan x$ είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα και φραγμένο άρα Ο.Σ.

Η f είναι ο περιορισμός της g στο $[0, \pi/3)$ άρα είναι Ο.Σ.

δ) $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$: $f(x) = \tan x$.

Επειδή $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$ η f δεν είναι Ο.Σ.

στ) $f(x)=\cos^5 x$, Π.Ο: $\mathbb{R}$ (είναι διάστημα)

$f'(x)=5\cos^4 x\cdot(-\sin x)$

$|f'(x)|\leq 5$, Άρα η f είναι Ο.Σ.

ζ) $f(x)=\sqrt{x^2+a^2}$, $x\in\mathbb{R}$ $(a>0)$

Π.Ο $\mathbb{R}$ (διάστημα).

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$|f'(x)|\leq\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}\leq 1$, άρα η f είναι Ο.Σ.

η) $f(x)=\frac{\cos(x^2)}{x+1}$, όπου $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

$|\cos(x^2)|\leq 1$ φραγμένη.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, η f είναι

συνεχής, άρα από

άσκηση 5 η f είναι Ο.Σ.

ε) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\cos x$

$(f'(x)=\cos x-x\sin x)$

Θέτουμε: $x_n=2n\pi+\pi/2$

$y_n=2n\pi+\left(\pi/2-\frac{1}{n}\right)$

$x_n-y_n=\frac{1}{n}\to 0$.

$f(x_n)-f(y_n)=x_n\cos x_n-y_n\cos y_n$.

$=0-\left(2n\pi+\left(\frac{\pi}{2}-y_n\right)\right)\cdot\cos\left(2n\pi+\left(\pi/2-\frac{1}{n}\right)\right)$

$$= -\left((2n\pi)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\right)\sin\frac{1}{n}$$

$$= -2n\pi\cdot\sin\frac{1}{n} - \left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}$$

$$= -2\pi\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} - \left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\cdot\sin\frac{1}{n} \to -2\pi \neq 0$$

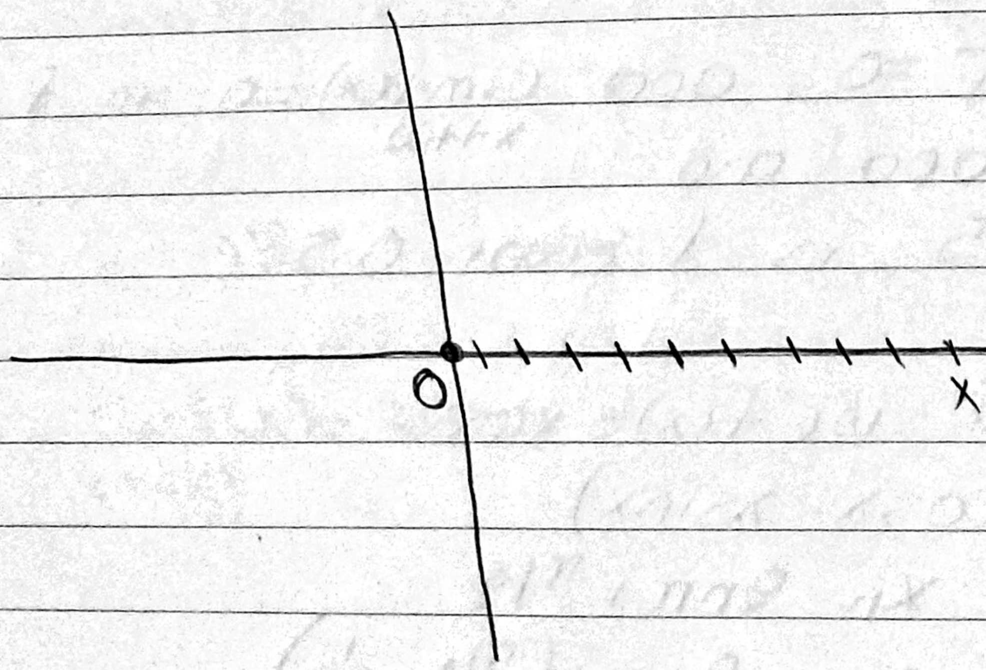
Άρα η f δεν είναι Ο.Σ.

Φυλλάδιο 9ο, Άσκηση 8)

Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι Ο.Σ. νδο $\exists\, A,B>0$ ώστε $|f(x)|\le A|x|+B,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Απόδ.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon=1$ συμπεραίνουμε ότι $\exists\,\delta>0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}: |x-y|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<1$



Θα δο: $|f(x)|\le\frac{1}{\delta}|x|+(1+|f(0)|)$

NO

Για $x=0$ είναι προφανές ότι ισχύει.
Για $x>0$ θέτουμε $n=\left[\frac{x}{\delta}\right]$ τότε

$$n \le \frac{x}{\delta} \le n+1 \quad \text{άρα} \quad \frac{x}{n+1} < \delta.$$

Θέτουμε $x_k = k \cdot \frac{x}{n+1}$, για $k=0,1,2,\dots,n+1$.

$$|f(x)| \le |f(0)| + |f(x)-f(0)|$$
$$\le |f(0)| + \sum_{k=1}^{n+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$
$$\le |f(0)| + \sum_{k=1}^{n+1} 1 = |f(0)| + n+1$$
$$\le |f(0)| + \frac{x}{\delta} + 1$$
$$= \frac{1}{\delta}|x| + (1+|f(0)|)$$

Για $x<0$, θέτουμε $n=\left[-\frac{x}{\delta}\right]$.
Με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι:
$$|f(x)| \le \frac{1}{\delta}|x| + (1+|f(0)|)$$

Φυλλάδιο 2ο, Άσκηση 2)
Για $a>1$ η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=|x|^a$ νδο:
η f δεν είναι Ο.Σ.

<u>Απόδ</u>

Αν η f ήταν ΟΣ: $\exists\, A,B>0 : |x|^a \le A|x|+B$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Για $\forall x>0$:
$$1 \le A\cdot\frac{1}{|x|^{a-1}} + B\cdot\frac{1}{|x|^a}.$$